ORDENAÇÃO POR INSERÇÃO (INSERTION SORT)

Algoritmos e Estrutura de Dados II

Prof. André Vignatti

ORDENAÇÃO

Ordenar é rearranjar um conjunto de objetos em ordem ascendente ou descendente.

i	1	2	3	4	5	6
v[i]	42	15	23	8	4	16
v[i]	4	8	15	16	23	42

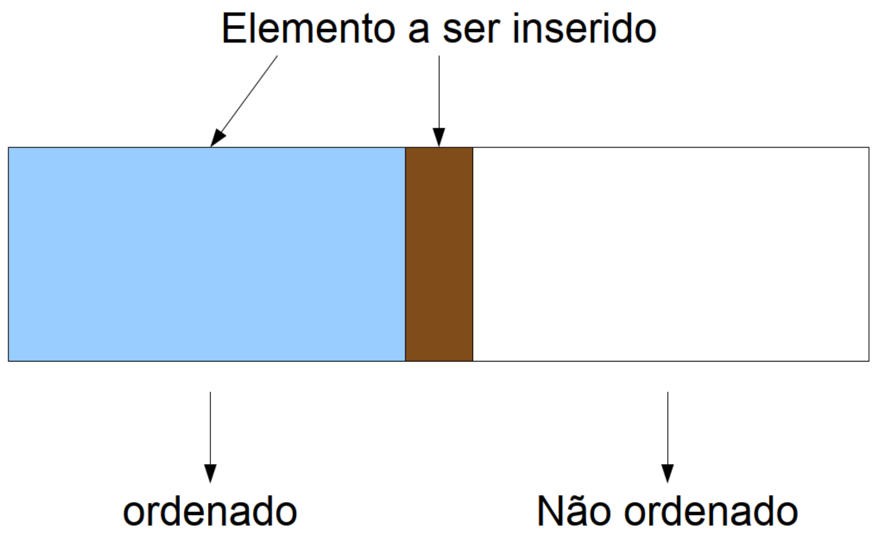
O objetivo da ordenação é organizar dados, facilitar a manipulação destes.

Problema: "Ordenação"	
Instância:	(v,a,b), onde v é um vetor indexado por [a..b]
Resposta:	o vetor v modificado de tal forma que v[a..b] é um vetor ordenado

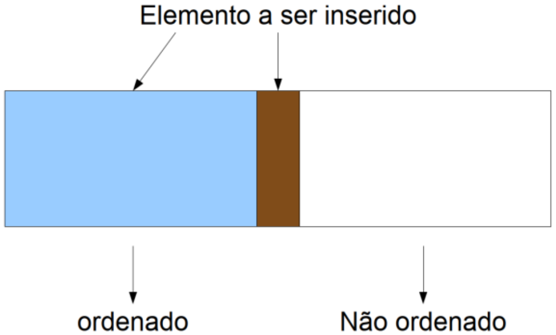
ORDENAÇÃO POR INSERÇÃO

- também chamado de **Insertion Sort**

ideia:



ORDENAÇÃO POR INSERÇÃO



i	1	2	3	4	5	6
v[i]	42	**15**	23	8	4	16
	15	42	**23**	8	4	16
	15	23	42	**8**	4	16
	8	15	23	42	**4**	16
	4	8	15	23	42	**16**
	4	8	15	16	23	42

ORDENAÇÃO POR INSERÇÃO: ALGORITMO

Ordena$_i$(v,a,b)
Se $a \geq b$
Devolva v
Ordena$(v, a, b-1)$
Insere(v, a, b)
Devolva v

Insere(v, a, b) é uma solução para o seguinte problema

Inserção em Vetor Ordenado	
Instância:	(v, a, b) onde $v[a..b-1]$ é um vetor ordenado.
Resposta:	o vetor v modificado de tal forma que $v[a..b]$ é um vetor ordenado.

ANÁLISE

$C(n)$: comparações com elementos do vetor de Ordena$_i(v,a,b)$ em vetor de tamanho n.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 1 \\ C(n-1) + C_I(n), & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

onde $C_I(n)$ é o número de comparações de Insere(v, a, b) em vetor de tamanho n

ANÁLISE

$$
\begin{aligned}
C(n) &= C(n-1) + C_I(n) \\
&= C(n-2) + C_I(n-1) + C_I(n) \\
&= C(n-3) + C_I(n-2) + C_I(n-1) + C_I(n) \\
&\;\;\vdots \\
&= C(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} C_I(n-i)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Quando chega na base?}}$$

Quando $n - k = 1$, ou seja, $k = n - 1$

ANÁLISE

Substituindo na recorrência:

$$\begin{aligned} C(n) &= C(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} C_I(n-i) \\ &= C(1) + \sum_{i=0}^{(n-1)-1} C_I(n-i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} C_I(n-i) \\ &= \sum_{i=2}^{n} C_I(i). \end{aligned}$$

Até aqui só vimos o custo do laço, falta a inserção propriamente dita.

INSERÇÃO

$$
\begin{array}{l}
\hline
\textit{Insere(v,a,b)} \\
\hline
\quad p \leftarrow \mathsf{Busca}(v[b], v, a, b-1) \\
\quad i \leftarrow b \\
\quad \mathsf{Enquanto}\ i > p+1 \\
\qquad \mathsf{Troca}(v, i, i-1) \\
\qquad i \leftarrow i-1 \\
\quad \mathsf{Devolva}\ v \\
\hline
\end{array}
$$

onde $\mathsf{Busca}(x, v, a, b)$ é uma solução para o problema de Busca em Vetor Ordenado

$\mathsf{Troca}(v, a, b)$ é

$$
\begin{array}{l}
\hline
\textit{Troca(v,a,b)} \\
\hline
\quad x \leftarrow v[a] \\
\quad v[a] \leftarrow v[b] \\
\quad v[b] \leftarrow x \\
\hline
\end{array}
$$

INSERÇÃO: ANÁLISE

Seja C_B as comparações feitas pela Busca. Note que

$$C_I(n) = C_B(n-1)$$

Lembrando das aulas passadas:

$$\begin{aligned} C_B^+(k) &= k \\ C_B^-(k) &= 1 \end{aligned}$$

ORDENAÇÃO: ANÁLISE – PIOR CASO

voltando à análise da ordenação por inserção:

$$
\begin{aligned}
C^+(n) &= \sum_{i=2}^{n} C_I^+(i) \\
&= \sum_{i=2}^{n} C_B^+(i-1) \\
&= \sum_{i=2}^{n} (i-1) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i.
\end{aligned}
$$

Pelo somatório de Gauss, $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, e substituindo na equação,

$$C^+(n) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} \sim \frac{n^2}{2}$$

ORDENAÇÃO: ANÁLISE – MELHOR CASO

e para o melhor caso:

$$\begin{aligned} C^{-}(n) &= \sum_{i=2}^{n} C_I^{-}(i) \\ &= \sum_{i=2}^{n} C_B^{-}(i-1) \\ &= \sum_{i=2}^{n} 1 \\ &= n-1. \end{aligned}$$